Интерполяционные кубические сплайны

Интерполяционный кубический сплайн – функция http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image237.gif, обладающая следующими свойствами:

1. http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image238.gif;
2. на каждом отрезке http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image239.gif, http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image240.gif, функция http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image241.gif имеет вид

http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image242.gif, http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image240.gif;

1. на всем отрезке задания http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image243.gif функция http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image244.gif

имеет непрерывную вторую производную.

Так как сплайн http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image245.gif на каждом из отрезков http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image246.gif определяется четырьмя коэффициентами, то для его полного построения на всем отрезке задания http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image247.gif необходимо найти всего http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image248.gif чисел.

Для выполнения третьего условия достаточно потребовать непрерывность сплайна во всех внутренних узлах

http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image249.gif, http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image250.gif

http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image251.gif

http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image252.gif

http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image253.gif,

а также его первой

http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image254.gif, http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image250.gif

http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image255.gif

и второй производных в этих узлах

http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image256.gif, http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image250.gif

http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image257.gif

Вместе с первым требованием

http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image258.gif, http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image259.gif

получается http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image260.gif неравенства.

Из вышеприведенных уравнений получается следующая система линейных уравнений:

http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image261.gif, http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image250.gif,

которую можно решить методом прогонки (см. “Системы линейных уравнений”).

Недостающие два условия можно получить, задав значения вторых производных на концах отрезка http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image247.gif.

Граничные условия первого типа. Задание на концах отрезка http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image262.gif значений первой производной искомой функции:

|  |  |
| --- | --- |
| http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image263.gif | (1) |

Граничные условия второго типа. Задание на концах отрезка http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image264.gif значений второй производной искомой функции:

|  |  |
| --- | --- |
| http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image265.gif | (2) |

Граничные условия третьего типа (периодические условия). Используются, когда интерполируемая функция является периодической с периодом http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image266.gif:

|  |  |
| --- | --- |
| http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image267.gif | (3) |

Граничные условия четвертого типа.

|  |  |
| --- | --- |
| http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image268.gif | (4) |

Позволяют уменьшить число разрывов третьей производной во внутренних узлах http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image264.gif.

В случае, если нет дополнительной информации о поведении аппроксимируемой функции, то используются естественные краевые условия (5), которые могут привести к резкому снижению точности аппроксимации вблизи концов отрезка http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image264.gif, т.к. вне интервала график представляет из себя прямую линию.

|  |
| --- |
| http://www.algmet.narod.ru/theory_a4m/spline/Image269.gif |